Criterio Astratto

Dati $\mathcal{F}, \mathcal{M} : X \to \mathbb{R}$, se

$$\mathcal{M}(x) \leq \mathcal{F}(x) \quad \forall x \in X$$
$$\mathcal{M}(\bar{x}) \leq \mathcal{M}(x) \quad \forall x \in X$$
$$\mathcal{M}(\bar{x}) = \mathcal{F}(\bar{x}),$$
allora $\bar{x}$ è minimo per $\mathcal{F}$.

Per noi $X = \{ u \in C^1([a,b]),\ u(a) = u_1,\ u(b) = u_2 \}$.

Definizione: Data la terna $(\mathcal{F}, X, \bar{u})$, si dice che $\mathcal{M}$ è un calibratore se

- $\exists\, M : \quad \mathcal{M}(u) = \int M(x, u, u')$
- $\forall u \in X, \quad F(x, u, u') \geq M(x, u, u')$ ma $F = M$ su $(x, \bar{u}, \bar{u}')$.
- $\mathcal{M}(u) = \mathcal{M}(\bar{u}) \quad \forall u \in X$.

Ovviamente se esiste un calibratore allora $\bar{u}$ è un minimo.

Tentativo: Sia $S = S(x, z)$, e definiamo $M(x, z, p) = S_x(x, z) + S_z(x, z) \cdot p$.

Lemma: Per ogni $S \in C^2$, si ha $\frac{d}{dx} M_p = M_z$, e $\mathcal{M}$ è costante su X.

Dim.: $M_p = S_z$ è chiusa. Allora

$$\frac{d}{dx} M_p = \frac{d}{dx} S_z(x, u) = S_{zx} + S_{zz} u'.$$

D'altra parte,

$M_z = S_{xz} + S_{zz} \cdot u'$, quindi $\frac{d}{dx} M_p = M_z$.

Inoltre, $M(u) = \int_a^b M(x, u, u')\, dx = \int_a^b S_x(x, u) + S_z(x, u) \cdot u' \, dx =$

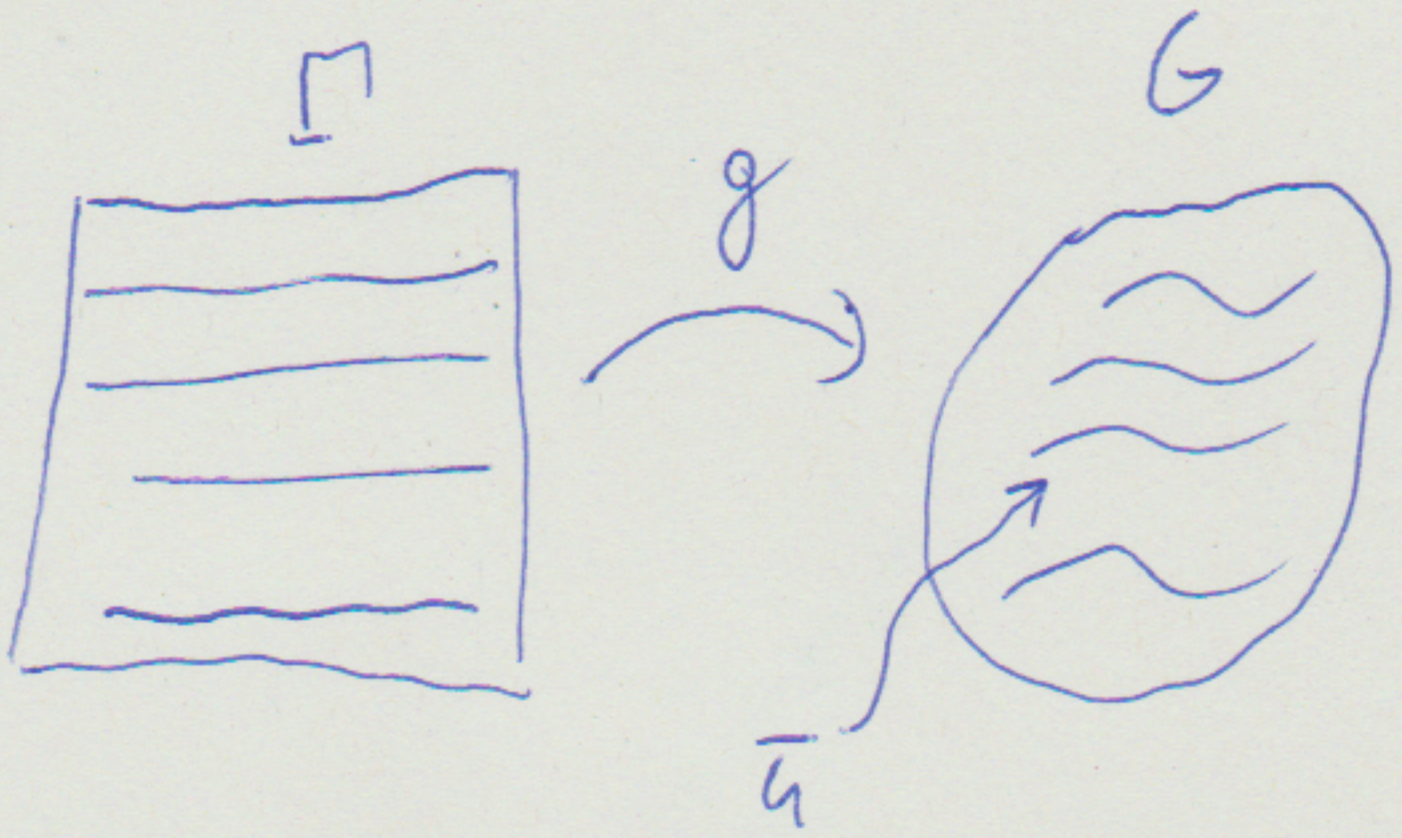
$$= \int_a^b \frac{d}{dx} S(x, u(x))\, dx = S(b, u_2) - S(a, u_1).$$

Per mostrare che $\bar{u}$ sia un minimo, allora, devo trovare S tale che

$F \geq M$ ma $F = M$ su $(x, \bar{u}, \bar{u}')$.

Diamo qualche definizione.

Siano $\Gamma, G \subseteq (a, b) \times \mathbb{R}^n$ due insiemi semplicemente connessi e tali che il grafico di $\bar{u}$ sia dentro G. Un CAMPO è una biiezione $g : \Gamma \to G$, di classe C^1, tale che esista una $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ con $g(x, v) = (x, \varphi(x, v))$.



Il campo si dice ADATTATO a $\bar{u}$ se esiste $\hat{c}$ tale che $g(\cdot, \hat{c})$ è il grafico di $\bar{u}$, ossia $\varphi(x, \hat{c}) = \bar{u}(x) \quad \forall\, x \in (a, b)$.

Chiamiamo pendenza di g la funzione $P(x, z) = \varphi'(g^{-1}(x, z))$.

Si noti che se $u(x) = \varphi(x, c)$, allora $\boxed{u'(x) = P(x, u(x))}$

In pratica un campo è un fibrato di funzioni $u = \varphi(\,; c)$.